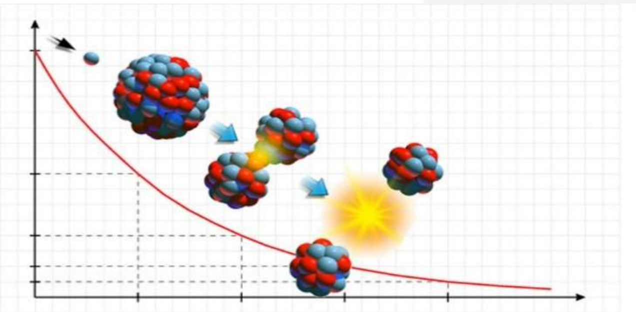
FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

1.0. FUNÇÃO EXPONENCIAL.
A função exponencial é uma das funções matemáticas mais úteis e poderosas em estudos ambientais, aplicável, entre outros exemplos, ao crescimento das populações e das suas necessidades (consumo de recursos) e ao estudo de problemas como a acumulação de poluentes e ainda no crescimento financeiro e suas ações. Podemos observar que a função exponencial possui uma característica peculiar, de que ao longo do tempo, ela tende a duplicar os seus valores (quando crescente) ou reduzirem à metade (quando decrescente).

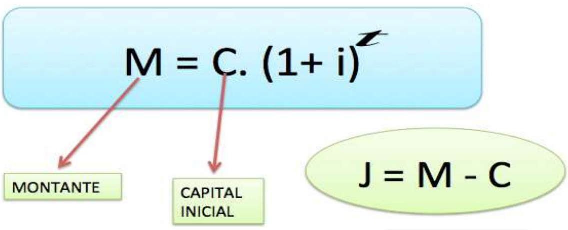
Exemplos:

Geralmente, o crescimento de determinados seres vivos microscópicos, como as bactérias, acontece exponencialmente.

A decomposição ou desintegração de determinadas substâncias também acontece segundo um padrão exponencial. A chamada meia vida de uma substância é o tempo necessário para que ela reduza a sua massa pela metade.



O sistema de juros compostos também funciona de forma exponencial.



Chamamos de função exponencial (ou exponencial clássica) toda função do tipo $f(x) = a^x$, definida para todo x real, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

$f(x) = 3^x \to$ Função exponencial de base 3 (função crescente)

$a = 3 > 1$

$g(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (função decrescente)

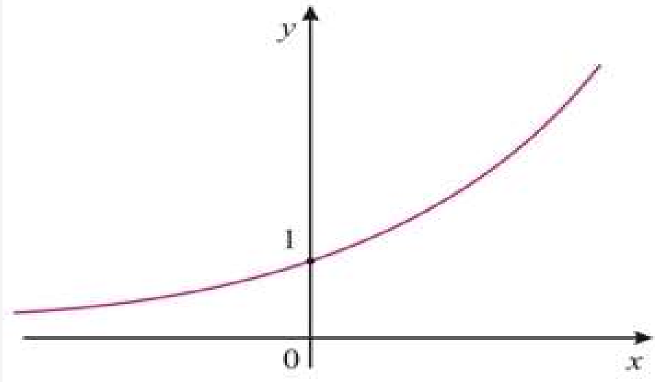
Função exponencial de base $\frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}\,(0 < a < 1)$

Representação Gráfica.

1° caso: Função exponencial crescente

Quando $a > 1$ a função exponencial é sempre crescente.



$f(x) = a^x \to f(0) = a^o = 1$

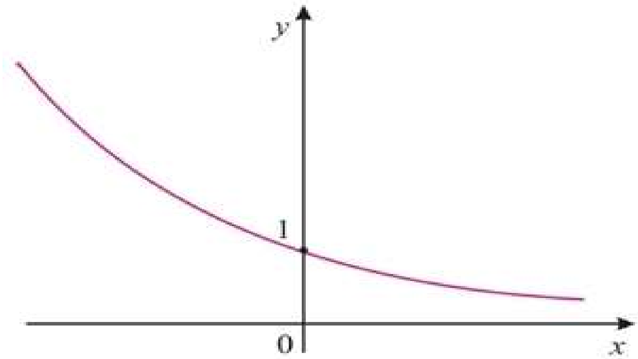
$(0,1) \in f$

Exemplo:

$y = 6^x$

2° caso: Função exponencial decrescente

Quando $0 < a < 1$ a função exponencial é sempre decrescente.



$f(x) = a^x \to f(0) = a^o = 1$

$(0,1) \in f$

Exemplo:

$p(t) = \left(\frac{1}{5}\right)^t$

Observando os gráficos acima, podemos concluir que:

- O gráfico (curva) nunca irá interceptar o eixo x, pois a função exponencial não possui raiz.
- O gráfico (curva) irá cortar apenas o eixo y e sempre será no ponto $(0,1)$, sendo que os valores de y sempre serão positivos.

- $D(f) = R$
- $\text{Im} =]0;+\infty[= R_+^*$

que:

Dica: $f(x) = a^x > 0$

3.0. EQUAÇÃO EXPONENCIAL
Chama-se equação exponencial, a toda equação, onde a variável encontra localizada no expoente.
Exemplos:
a) $3^x = 81$ b) $2^{x+1} + 2^{x-3} = 16$

Classificação de uma equação exponencial.
a)**Equação exponencial simples :**Um termo em cada membro.
Para resolver uma equação exponencial devemos, basicamente:
- **reduzir os dois membros da equação à mesma base;**
- **igualar os expoentes e resolver a equação resultante.**

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Em que: $a > 0$ e $a \neq 1$

Fique Ligado

b)**Equação exponencial por artifício**
Mais de um termo em um de seus membros.
Processo de Resolução
Se houver adições nos expoentes, comece transformando-as em produto de potências de mesma base e se houver subtrações no expoente, transforme-as em divisão de potências de mesma base. A seguir, faz-se necessário uma mudança de variável.
Lembrete!!!

$$a^{m+n} = a^m . a^n$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

4.0. INEQUAÇÃO EXPONENCIAL
É toda inequação que tenha a variável no expoente
Para resolvermos uma inequação exponencial devemos transformar a inequação dada em igualdade de mesma base, de maneira análoga à solução das equações exponenciais; para isso, aplicaremos as definições e propriedades da potenciação.
Existem dois casos básicos de inequação exponencial:
1º caso) A base a em questão é tal que $a > 1$. Assim teremos que:

$$\begin{cases} a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 \\ a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \end{cases}$$

Isso se deve ao fato de que, se $a > 1$ a função é crescente, logo, aumentando o valor de x, também se aumenta o valor de a^x; e diminuindo o valor de x, também se diminui o valor de a^x.
"Se $a > 1$, conservamos o sinal da desigualdade na inequação exponencial."

2º caso) A base a em questão é tal que $0 < a < 1$. Assim teremos

$$\begin{cases} a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \\ a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 \end{cases}$$

Isso se deve ao fato de que, se $0 < a < 1$ a função é decrescente, logo, aumentando o valor de x, o valor de a^x diminuirá; e diminuindo o valor de x, o valor de a^x aumentará.
"Se $0 < a < 1$, invertemos o sinal da desigualdade na inequação exponencial."
Observação: Existem inequações exponenciais que serão resolvidas através de artifícios matemáticos.
Outro método fundamental utilizado na resolução de equações exponenciais é o que utiliza o conceito e propriedades de logaritmos. (Esse método iremos ver no Estudo dos logaritmos).

EXERCÍCIOS BÁSICOS

1) Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{x+1} = 64$ b) $3^x = \frac{1}{243}$ c) $\sqrt[5]{2^x} = \frac{1}{32}$

d) $2.3^{x+1} + 15 = 501$ e) $4.5^{x-1} = 100$

f1) $7^{x-8} - 1 = 342$ g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4} = 8^{x+2}$

h) $\left(10^x\right)^{1-x} = 0,000001$ i) $\frac{8}{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-10}$

2) **A solução da equação** $3.4^x - 20 = 364$ **é um número**
a)par b)ímpar c)irracional d)inteiro e)racional

3) Resolver as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$

b) $3^{2x} + 2.3^x - 15 = 0$

c) $\mathbf{3^{x+2} - 3^x = 216}$

4)Certa substância radioativa se decompõe segundo a lei
m(t) = $10.000 \bullet 2^{-0,2t}$ onde m(t) representa a massa da substância, em gramas, e t, o tempo, em minutos. Com base nessas informações, em quantos minutos a massa dessa substância estará reduzida a 625g?
(A) 24 **(B) 20** (C) 16 (D) 10 (E) 5

5)Os coelhos são conhecidos por se reproduzirem rápida e eficientemente na natureza, visto que são presas naturais, os coelhos se reproduzem de forma exponencial para manter a espécie viva. O coelho-europeu foi introduzido na Austrália, no século XIX e, por não terem predador natural naquele país, a multiplicação dos coelhos atingiu níveis muito elevados e se transformou num problema prejudicando bastante a agricultura.
Em certa região da Austrália, a população de coelhos era dada pela função $P = 1000.2^{0,4t}$, em que t é o tempo medido em anos, com representando o ano 1840.
A população de coelhos nessa região atingirá 64.000 indivíduos no ano
a)1855. b) 1860. c) 1865. d) 1870. e) 1875.

6)Um vazamento em um navio petroleiro provocou um desastre ambiental de enormes proporções fazendo com que uma grande área do Oceano Pacífico ficasse coberta de óleo. Atualmente a mancha possui uma área de 5000 m^2 e, segundo um especialista, irá triplicar seu tamanho a cada dia. Qual a função que determina a área ***A*** da mancha de óleo, ***t*** dias depois?

a) $A = 5000 + 3t$ b) $A = 5000^{3t}$ c) $A = 5000 + 3^t$
d) $A = 1500t$ e) $A = 5000.3^t$

7)Para estudar o crescimento de uma colônia de bactérias, um pesquisador colocou em uma cultura 2000 bactérias e percebeu, com o passar do experimento, que a quantidade de bactérias triplicava a cada 5 horas. Qual será a função que determina a quantidade ***B*** de bactérias nessa cultura, ***t*** horas após o início do experimento?

a) $B = 2000.3^t$ b) $B = 2000.5^t$ c) $B = 2000.5^{\frac{t}{3}}$
d) $B = 2000.3^{\frac{t}{5}}$ e) $B = 2000.3^{5t}$

8)O Japão é um dos países com os graves problemas demográficos. A baixa fecundidade que já dura décadas leva à redução da população em idade de trabalho, deprecia a demanda por investimentos e leva a uma estagnação econômica. https://jornalggn.com.br/europa/os-riscos-do-crescimento-demografica-negativo-naeuropa/ (adaptado)
Suponha que a população P do Japão, hoje com 127 milhões de habitantes, decresça anualmente a uma taxa de 1% ao ano. Qual será essa população P, em milhões de habitantes, daqui a t anos?

a) $P(t) = 127 - 0,01t$
b) $P(t) = 127 - 0,99t$
c) $P(t) = 127 \cdot 0,99^t$
d) $P(t) = 127 \cdot 0,01^t$
e) $P(t) = 127^{0,99t}$

ESTUDOS DOS LOGARITMOS

2.0.Logaritmo

2.1.Definição

Sejam a , b e c números reais, tais que $a > 0$ e $1 \neq b > 0$.
Definimos, então:

$$\log_a^b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

(Lê-se "logaritmo de b na base a" é igual a x)

Em que b é o logaritmando ou antilogaritmo; a é a base;
x é o logaritmo ou resultado.

Exemplos:

$\log_6^1 = 0$, **pois** $6^0 = 1$

$\log_{13}^{169} = 2$, **pois** $13^2 = 169$

Condições de existência

Para que o $\log_a b$ exista é necessário que:

$$\begin{cases} a > 0 \text{ e } a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

Essas três condições são chamadas condições de existência.

Observação:

• Há dois sistemas especiais de logaritmos: o sistema de logaritmos decimais (base 10) e o sistema de logaritmos neperianos ou hiperbólico ou naturais (base e)

2.2.Sistema de Logaritmos Neperianos(lnx ou lg x)

O sistema de logaritmos neperianos possui como base o número irracional e (e = 2,718...). Esse sistema também é conhecido como sistema de logaritmos naturais, com a condição x > 0. Ele pode ser expresso por:

$$\ln x = \log_e x$$

Exemplos:

$\ln 2 =$ $\qquad$ $\ln e =$

2.3.Sistema de Logaritmos Decimais.

Quando a base do logaritmo é 10, escrevemos $\log_{10} b$. Para maior comodidade, podemos omitir a escrita da base, assim $\log b$. Nesse caso, já sabemos que se trata de um logaritmo de um número b, na base 10.

$$\log_{10} b = \log b$$

Exemplos:

$\log_{10} 2 =$ $\qquad$ $\log 10 =$

Consequências da definição

Diretamente da definição podem ser concluídas algumas consequências imediatas, são elas:

• $\log_a 1 = 0$ • $\log_a a = 1$ • $\log_a a^n = n$

• $a^{\log_a b} = b$

2.4. Propriedades operatórias

Considerando satisfeitas as condições de existência, são válidas as seguintes propriedades operatórias dos logaritmos:

• $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$ (Logaritmo de um produto)

• $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ (Logaritmo de um quociente)

• $\log_a b^n = n.\log_a b$ (Logaritmo de uma potência)

2.5. Mudança de base

Podemos efetuar uma mudança na base do logaritmo da seguinte forma:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Nota: Neste caso estamos mudando da **base** a para **base** c

2.6. Cologaritmo

Denomina-se **cologaritmo** de um número o oposto do logaritmo desse número, na mesma base

$$\operatorname{colog}_a b = -\log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a\left(\frac{1}{b}\right)$$

5.0.

3.0. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Dois fatores devem ser considerados durante a solução de uma equação logarítmica:

(I) Deve-se, a partir das propriedades supracitadas, colocar todos os **log's** numa mesma base.

$\log_a^x = \log_a^y \rightarrow x = y$

(II)Ao final do problema, e preciso conferir se a solução obedece as restrições do logaritmo.

Obs: Em alguns casos, e necessário uma ideia extra como introduzir uma variável auxiliar ou tirar logaritmo de ambos os lados da equação.

4.0. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

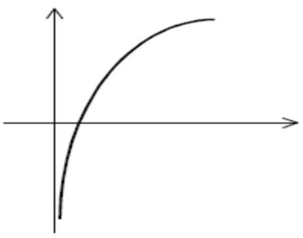
Seja $a \in R$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Denomina-se função logarítmica à função $f: R_+^* \rightarrow R$, dada por:

$$f(x) = \log_a x$$

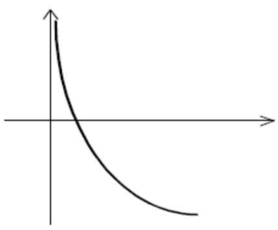
Exemplos: $f(x) = \log_2 x \quad f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x-2)$

GRÁFICOS

1° caso: $a > 1 \Rightarrow$ **FUNÇÃO CRESCENTE**



2° caso: $0 < a < 1 \Rightarrow$ **FUNÇÃO DECRESCENTE**



Da simples observação dos gráficos acima, podemos concluir que:

- $D(f) = R_+^*$ e $\operatorname{Im}(f) = R$
- Os gráficos interceptam o eixo Ox no ponto (1,0)
- Os gráficos não interceptam o eixo Oy.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

1)Calcule

a) $\log_{0,5} 16$ b) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81}$

c) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$

EQUAÇÕES EXPONENCIASX LOGARITMO

2)Resolver as equações abaixo
(Considerando: log2=0,3, log 3=0,48 e log 5=0,7)

a) $3^x = 2$ b) $3.2^x = 10.3^x$

3)Resolver as equações abaixo.

a) $\log_3 x = 4$

b) $\log_3(x+5) = 1$

c) $\log(2x+4) - \log(x+5) = \log 8$

d) $\log(x+1) + \log(x-1) = \log 3$

e) $\log_x(3x^2 - x) = 2$