

1.0. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)



3.1. INTRODUÇÃO

Bem, de maneira bem geral, podemos dizer que a Progressão Aritmética é uma sequência de números que crescem e decrescem a uma quantidade fixa.

Exemplo:

Observe a sequência dos anos que foram realizadas as olimpíadas de 2004 a 2016.

(2004, 2008, 2012, 2016,)

Visualizando a sequência, podemos perceber que os números estão aumentando de 4 em 4, ou de uma outra visão, podemos também perceber que a diferença entre um termo qualquer dessa sequência e seu antecedente é sempre igual a 4:

$$\text{Dessa forma podemos definir que: } \begin{cases} 2008 - 2004 = 4 \\ 2012 - 2008 = 4 \\ 2016 - 2012 = 4 \end{cases}$$



#FICAADICA

São sequências de números reais em que a diferença entre cada termo e o seu anterior, a partir do segundo, é um valor constante

r , denominado razão da P.A.

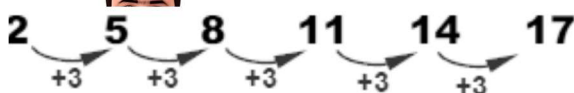
Exemplos:

$(-2, 4, 10, 16, \dots)$ é P.A. com $r = 6$.

$(-20, -25, -30, \dots)$ é P.A. com $r = -5$.

Progressão Aritmética

Soma-se constantemente um mesmo número.



OBSERVAÇÃO:

• A razão de uma P.A. pode ser obtida fazendo-se

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$$

- $r > 0 \Leftrightarrow$ P.A. crescente.
- $r = 0 \Leftrightarrow$ P.A. constante.
- $r < 0 \Leftrightarrow$ P.A. decrescente

1.2. Termo geral de uma P.A.

Em toda P.A., vale a relação

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Em que:

$a_1 \rightarrow$ primeiro termo

$a_n \rightarrow$ enésimo termo, termo geral ou último termo

$n \rightarrow$ número de termos

$r \rightarrow$ razão da P.A.



#FICAADICA

$$a_{12} = a_1 + 11r \quad a_{20} = a_{34} - 14r$$

$$a_9 = a_4 + 5r \quad a_8 = a_2 + 6r$$

OBSERVAÇÃO: INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Interpolarmos, inserir ou intercalar k meios aritméticos entre dois números a e b significa obter uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $(k + 2)$ termos.

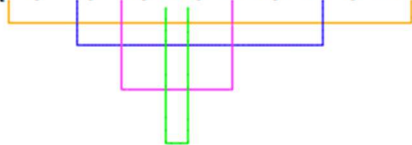


PROPRIEDADES DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

[P₁] Equidistância dos extremos

- Em toda P.A., a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

P.A.(2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; ...)



$$2+14=4+12=6+10=...$$

[P₂] Média aritmética

- Cada termo de uma P.A., excluindo os extremos, é média aritmética entre seu termo anterior e o posterior.

Ex: (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...)

$$\begin{cases} 5 = \frac{3+7}{2} \\ 13 = \frac{11+15}{2} \end{cases}$$

1.3.Representações especiais em P.A.

(Termos desconhecidos em P.A)

- Numa P.A. com número ímpar de termos, é

conveniente representarmos o termo central por x :

- P.A de três termos

$$(x-r, x, x+r)$$

- P.A de Cinco termos

$$(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)$$

- Numa P.A. com número par de termos, é conveniente representarmos os termos centrais por $x-y$ e $x+y$:

- P.A de Quatro termos

$$(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$$

- P.A de Seis termos

$$(x-5y, x-3y, x-y, x+y, x+3y, x+5y)$$

Observação: Note que, nesses casos, $r = 2y$.



3.4.SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

De modo geral, a soma dos termos de uma P.A. finita, com n termos, é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Em que:

a_1 é o primeiro termo ,

a_n é o último termo

n é o número de termos

S_n é a soma dos n termos



- $S_1 = a_1$
- A sequência dos números naturais pares e ímpares formam uma progressão aritmética de razão 2.

2.0.PROGRESSÃO GEOMÉTRICA-PG



Segundo dados do IBGE, éramos aproximadamente 180 milhões de brasileiros em 2004. Considerando um crescimento populacional de 2% ao ano, quantos brasileiros seremos, aproximadamente em 2008?

VEJAMOS COMO SERIA...

ANO	NÚMERO DE HABITANTES
2004	180.000.000
2005	$180.000.000 \times 1,02 = 183.600.000$
2006	$183.600.000 \times 1,02 = 187.272.000$
2007	$187.272.000 \times 1,02 = 191.017.400$
2008	$191.017.400 \times 1,02 = 194.837.788$

Observe que a partir do ano de 2005, a estimativa do número de brasileiros de um ano foi obtida multiplicando a constante 1,02 pelo número de brasileiros do ano anterior.



A sequência (180.000.000; 183.600.000; 187.272.000; 191.017.440; 194.837.788) é um exemplo de **progressão geométrica**.

2.1. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

É toda sequência numérica onde cada termo a partir do Segundo é igual ao anterior multiplicado por uma constante q (razão da P.G.).

Exemplos:

(2, 6, 18, 54, ...) é P.G. com $q = 3$.

(3, -6, 12, -24, ...) é P.G. com $q = -2$.

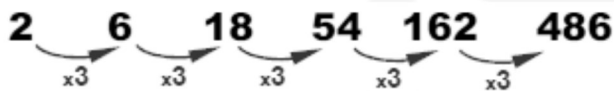
(18, 18, 18, 18, ...) é P.G. com $q = 1$.

(36, 12, 4, $\frac{4}{3}$, ...) é P.G. com $q = \frac{1}{3}$.



Progressão Geométrica

Multiplica-se constantemente um mesmo número.



Observação

- A razão de uma P.G. pode ser obtida fazendo-se

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots$$

OBSERVAÇÃO:

P.G. oscilante ou alternante $\rightarrow q < 0$

P.G. Convergente $\rightarrow -1 < q < 1$

P.G. Constante $\rightarrow q = 1$

Ex: (5; 5; 5; 5; ...) é uma PG de razão $q = 1$



A P.G. constante também é uma P.A. de razão $r = 0$



2.2. FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.G

Considere a progressão geométrica

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n).$$

Conhecendo o primeiro termo a_1 e a razão q , pela fórmula do termo geral, podemos determinar qualquer um dos termos da P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

onde:

a_1 é o primeiro termo;

a_n é o último termo(ou termo geral);

n é o número de termos;

q é a razão da P.G.



$$a_6 = a_1 \cdot q^5; a_8 = a_3 \cdot q^5;$$



INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolar (ou inserir) k meios geométricos entre dois números a e b significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $(k + 2)$ termos.

$$(a; \text{--- meios geométricos ---}; b)$$

DICA: Inserir (colocar entre)

2.3. PROPRIEDADES DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

P_1) Numa PG, cada termo (a partir do segundo) é a média geométrica entre seu termo anterior e o posterior.

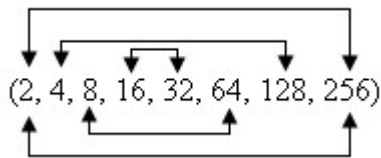
Exemplo: PG (3, 6, 12, 24, 48)

$$6 = \sqrt{3 \cdot 12}, 12 = \sqrt{6 \cdot 24}, 24 = \sqrt{12 \cdot 48}$$



P_2) Numa PG, o produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Exemplo:



$$2 \cdot 256 = 4 \cdot 128 = 8 \cdot 64 = 16 \cdot 32$$

P_3) Numa P.G. com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Exemplo:

$$(3, 9, 27, 81, 243) \rightarrow 27^2 = 3 \cdot 243$$

Termo médio: 27 Extremos: 3 e 243

2.4.NOTAÇÃO ESPECIAL (Termos desconhecidos em P.G)

Para a obtenção de uma P.G, é muito prática a notação seguinte:

☞ Para três termos: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$, $q \neq 0$.

☞ Para Quatro termos: $\left(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y^2}, x \cdot y, x \cdot y^3\right)$, onde $q = y^2$.

☞ Para Cinco termos: $\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, x \cdot q, x \cdot q^2\right)$, $q \neq 0$.

2.5.SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G INFINTA (LIMITE DE UMA SOMA)

Notação: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty$

A soma de todos os infinitos termos de uma PG($a_1; a_2; a_3; \dots$) de razão $-1 < q < 1$ (P.G convergente) é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

2.6.SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G FINITA.

Conhecendo-se o número de termos a somar:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Conhecendo-se o último termo a somar:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

, com $q \neq 1$.



$$S_n = a_1 \cdot n, \text{ para } q = 1.$$



Ex: (5; 5; 5; 5; ...) é uma PG de razão $q = 1$ e uma P.A de razão $r = 0$;



Podemos associar progressões aritméticas à funções do 1º grau e ao estudo do juros simples.

Podemos associar progressões GEOMÉTRICAS à funções EXPONENCIAIS e ao estudo do juros COMPOSTOS.



EXERCÍCIOS BÁSICOS-PA

1) Qual o 14º termo da sequência (3, 10, 17, ...)?

A) 91 B) 92 C) 93 D) 94 E) 95

2) Quantos termos apresenta a sequência

(2, 10, 18, ... , 250)?

A) 28 B) 29 C) 30 D) 31 E) 32

3) A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.



Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o trigésimo termo da sequência?

a) 119 b) 118 c) 120 d) 80 e) 95

