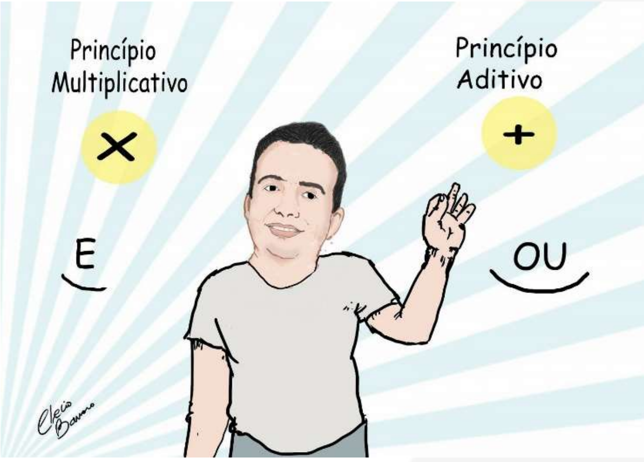
ANÁLISE COMBINATÓRIA
É a parte da Matemática que se preocupa em realizar contagens.
A Análise Combinatória é a parte da Matemática que estuda o número de maneiras que um acontecimento pode ocorrer, sem que haja a necessidade de desenvolvermos todas as possibilidades.

PRINCÍPIOS DE CONTAGEM



<u>Exemplo 1</u>: Uma lanchonete que vende **três** tipos de refrigerantes e **dois** tipos de cerveja.

Pergunta-se:

a) Quantas são as opções para **quem escolher <u>uma</u> bebida?**

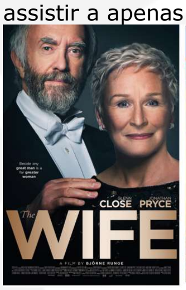
Solução:

b) Quantas são as opções para quem **quer tomar um refrigerante <u>e</u> depois uma cerveja?**

Solução:

R \ C	c_1	c_2
r_1	(r_1, c_1)	(r_1, c_2)
r_2	(r_2, c_1)	(r_2, c_2)
r_3	(r_3, c_1)	(r_3, c_2)

<u>Exemplo 2</u>
Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que **Sormany Barreto** tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento.



a)Quantos são os programas que **Sormany Barreto** pode fazer no sábado?
Solução:

b)E se **Sormany Barreto** puder escolher apenas um filme e apenas uma peça de teatro, quantas possibilidades terá?

Solução:

Os princípios de contagem, na matemática, incluem:

I Princípio da Soma ou Aditivo:

Se um evento E_1 pode ocorrer de N_1 maneiras distintas, E_2, de N_2 maneiras distintas, ..., E_k, de N_k maneiras distintas, e se quaisquer dois eventos não podem ocorrer simultaneamente, então um dos eventos pode ocorrer em $(N_1+N_2+\ldots+N_k)$ maneiras distintas.

O MINISTÉRIO DO RACIOCÍNIO LÓGICO ADVERTE!!!

1º) Usamos o princípio aditivo quando devemos fazer uma única escolha dentre as diversas possíveis.
2º) Esse princípio está associado à ideia do conectivo ou

II-Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem:

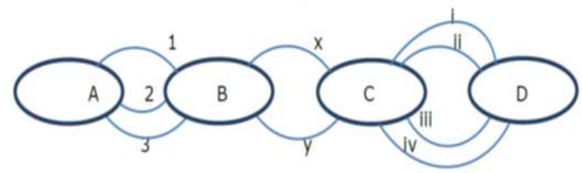
Considere que E_1, E_2, ..., E_k são eventos que ocorrem sucessivamente; se o evento E_1 pode ocorrer de N_1 maneiras distintas, o evento E_2 pode ocorrer de N_2 maneiras distintas, ..., o evento E_k pode ocorrer de N_k maneiras distintas, então todos esses eventos podem ocorrer, na ordem indicada, em $(N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k)$ maneiras distintas.

O MINISTÉRIO DO RACIOCÍNIO LÓGICO ADVERTE!!!

1º) Usamos o PFC ou princípio multiplicativo quando, em um evento, devemos fazer mais de uma escolha.
2º) Esse princípio está associado à ideia do conectivo e, e, consequentemente, à ideia de intersecção.
É usado em situações onde temos que fazer a 1ª escolha, a 2ª escolha, a 3ª escolha, ..., isto é, as escolhas têm que ocorrer simultaneamente.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

1)



De quantas formas diferentes podemos ir de:

a) de "A" até "D"?

b) de "A" até "D" e depois voltar para "A"?

c) de "A" até "D" e depois voltar para "A", sem repetir estradas?

2)Considere que uma determinada cidade possua duas regiões específicas onde estão as suas únicas saídas: a região norte e a região sul. Sabe-se que na região norte existem cinco saídas, enquanto que na região sul existem apenas duas. De quantas formas um indivíduo poderá sair dessa cidade usando uma das saídas?
(a) 2(b) 5(c) 7(d) 10 (e)12

3)Pedro é um rapaz super indeciso para tudo. Neste momento ele se encontra numa livraria, em dúvida quanto a comprar um livro para si. Ele está em dúvidas dentre livros de três prateleiras: as prateleiras A, B e C. Sabe-se que a prateleira Atem 15 livros, a prateleira B tem 20 livros e a prateleira C, 10. De quantas formas Pedro pode escolher um livro para si, supondo que seu universo de escolhas consista de livros apenas dessas prateleiras?
(a) 45 (b) 375(c) 750 (d) 1500 (e) 3000

4)Uma corrida é disputada por 8 atletas. O número de resultados possíveis para os 4 primeiros lugares é
(a) 336.(b) 512.(c) 1530.(d) 1680.(e) 4096.

5)Quantos são os resultados possíveis que se obtém ao jogarmos uma moeda não viciada três vezes consecutivas para cima?

6)Em uma sala há 7 homens e 8 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal (homem-mulher)?

7)Quantas palavras contendo 3 letras podem ser formadas com o alfabeto oficial?

8) Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com o alfabeto oficial?

.

FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Sendo $n \in \mathbb{N}$, chama-se fatorial de n o número representado por $n!$, assim definido:

$n! = n.(n-1).(n-2). \dots .3.2.1$ para $n \geq 2$

Exemplos:

$2! = 2.1 = 2 \qquad 3! = 3.2.1 = 6 \qquad 4! = 4.3.2.1 = 24$

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Dica:

$0! = 1$
$1! = 1$

Atenção!!!Quando for de nosso interesse parar, colocamos o fatorial $(!)$.

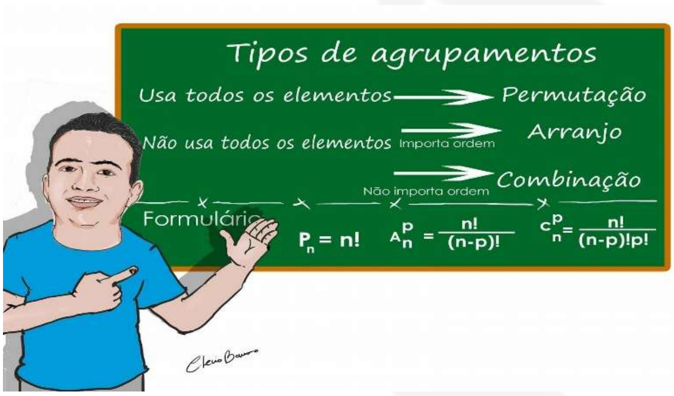
$5! = 5.4! = 5.4.3!$

Exemplos

$\dfrac{20!}{17!} =$

$\dfrac{12!}{8!.4!} =$

TIPOS DE AGRUPAMENTOS



ARRANJOS SIMPLES

São agrupamentos de n elementos distintos, tomados p a p, de tal forma que a ordem dos elementos é importante.

O número de arranjos simples pode ser obtido pelo princípio **multiplicativo de contagem** ou pela **fórmula:**

$$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

n **: total de elementos**

p **:número de elementos selecionados.**

Exemplos:

$A_{7,3} =$

$A_{9,2} =$

O MINISTÉRIO DO RACIOCÍNIO LÓGICO ADVERTE!!!

CASOS CLÁSSICOS DE ARRANJOS SIMPLES

Quando se falar em premiações distintas, posições para sentar, funções distintas, senhas, números de tantos algarismos, placas de veículos, etc.

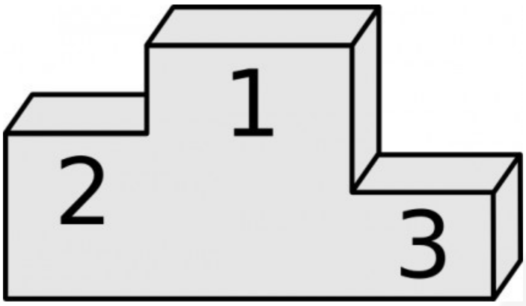
Nos problemas envolvendo Arranjos simples:
Dica 1
Elementos distintos e não usamos todos os elementos.
Dica 2
A ordem dos elementos é importante.(A ordem faz diferença).

Todos os problemas de Arranjos Simples também poderão ser resolvidos pelo Princípio Multiplicativo.

Exemplo:

Dos 10 judocas que participam de uma competição, os 3 melhores subirão em um pódio para receber uma premiação. Lembrando que cada atleta pode ocupar o 1º, 2º ou 3º lugar no pódio, o número das possíveis formas de os atletas comporem o pódio é

A)720. B)680. C)260. D)120.



(Sormany, João e Fagner) $\neq$ (Fagner, Sormany e João)

Todos os problemas de Arranjos Simples também poderão ser resolvidos pelo Princípio Multiplicativo

COMBINAÇÕES SIMPLES(COMBINAÇÕES SEM REPETIÇÃO)

São agrupamentos de n elementos distintos, tomados p a p, de tal forma que a ordem dos elementos **não é importante.**

O número de combinações simples é obtido pela fórmula

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

n **: total de elementos**

p **:número de elementos selecionados.**

Exemplos:

$C_{9,3} =$

$C_{100,98} =$

Dica:

$$C_{n,p} = \frac{anda\ p\ fatores}{p!}$$

O MINISTÉRIO DO RACIOCÍNIO LÓGICO ADVERTE!!!

CASOS CLÁSSICOS DE COMBINAÇÕES SIMPLES

Quando falar em:

-Beijos, abraços, apertos de mão, equipes (de plantão, de busca, etc.), comissões, grupos, diretorias, equipes(desde que não se diferencie os cargos).

-Pontos e circunferências, etc.

-Número de apostas na Mega Sena

-Número de partidas(turno único).

$C_{n,2}$

-Funções iguais.

Nos problemas envolvendo Combinações simples:

Dica 1

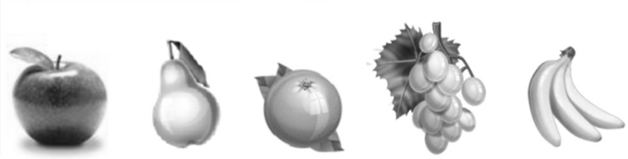
Elementos distintos e não usamos todos os elementos.

Dica 2

A ordem dos elementos não é importante.

(A ordem não faz diferença).

Exemplo 1: Uma lanchonete tem em sua dispensa 5 espécies de frutas.



Misturando 3 espécies diferentes, pode-se preparar quantos tipos de suco?

(a) 24. (b) 15. (c) 10. (d) 8.

Solução

(maçã, banana, uva) = **(banana, maçã uva)**

Exemplo 2: Em uma empresa três pessoas – Sormany, Danilo e Fagner – disputam duas vagas: uma para presidente e outra para vice-presidente. Quantas formações diferentes para esses dois cargos são possíveis?

Exemplo 3: Em uma empresa três pessoas – Sormany, Danilo e Fagner – devem formar duplas para um trabalho de campo. Quantas formações diferentes para essas duplas são possíveis?

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO OU COMBINAÇÕES COMPLETAS

São agrupamentos de n **elementos distintos ou não** , tomados p a p, de tal forma que a ordem dos elementos **não é importante.**

As combinações com repetição podem também ser transformadas em combinações simples equivalentes de acordo com a relação:

$$CR_{n,p} = C_{(n+p-1,p)}$$

Atenção:

n :número de elementos que se repetem.

p :número de elementos tomados.

Nos problemas envolvendo Combinações completas
Dica 1
Elementos distintos ou não.
Dica 2
A ordem dos elementos não é importante.
(A ordem não faz diferença).

O MINISTÉRIO DO RACIOCÍNIO LÓGICO ADVERTE!!!

O cálculo $CR_{n,p}$ determina a quantidade de soluções inteiras e não negativas de uma equação do tipo:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n = p$.

Nota: Iremos ver uma dica sensacional.

Exemplo 1:

Tenho quatro tipos de refrigerantes A , B , C e D.
De quantas formas diferentes posso servir 3 pessoas com esse refrigerante?

$$CR_{4,3} =$$

A título de ilustração, os agrupamentos são:

$AAA, AAB, AAC, AAD, ABC, ABD, ACD, BBB, BBA, BBC,$
$BBD, BCD, CCC, CCA, CCB, CCD, DDD, DDA, DDB, DDC.$

$x + y + z + w = 3$,onde as incógnitas x, y , z e w representam a quantidade que vamos servir de cada refrigerante(podendo, inclusive, ser zero)

Exemplo 2

Há 5 opções de coxinha em uma lanchonete. Sormany quer comer 3 coxinhas. De quantas maneiras ele pode escolher as 3 coxinhas se:
a)as coxinhas devem ser de sabores diferentes?

b)as coxinhas podem ser de mesmo sabor?

Exemplo 3
Com 3 marcas diferentes de cadernos, a quantidade de maneiras distintas de se formar um pacote contendo 10 cadernos será igual a :
a)120 b)60 c)56 d)66 e)40

Exemplo 4
Com 3 marcas diferentes de cadernos, a quantidade de maneiras distintas de se formar um pacote contendo 10 cadernos(pelo menos um de cada marca) será igual a :
a)120 b)60 c)56 d)28 e)35

Exemplo 4
Quantas soluções positivas tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$?
a)40 b)56 c)70 d)74 e)76

PERMUTAÇÕES SIMPLES
É o tipo de agrupamento em que todos os elementos participam. Diferem entre si ao mudarmos a ordem de seus elementos.

$$P_n = n!$$

Nos problemas envolvendo Permutações simples:
Dica 1
Elementos distintos

Dica 2
A ordem dos elementos é importante.
(A ordem faz diferença).

Dica 3
Usamos todos os elementos.

O MINISTÉRIO DO RACIOCÍNIO LÓGICO ADVERTE!!!

Número de formas de colocar n elementos em n posições.
Problemas com: anagramas, fila indiana,...

Exemplo 1
Seis cadeiras estão dispostas numa fila. O total de maneiras distintas que seis pessoas podem se sentar nessas cadeiras é igual a:
A)4125 B)120 C)720 D)225

Exemplo 2
Considerando a palavra **BRUNA,** responda:

a) Quantos anagramas podem ser formados?

b) Quantos anagramas começam por R?

c) Quantos anagramas começam por RA?

d) Quantos anagramas terminam por consoante?

e) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

f) Quantos anagramas apresentam as letras B, R e U, juntas e nessa ordem?

g) Quantos anagramas apresentam as letras B, R e U, juntas?

Exemplo 3
Em quantos anagramas da palavra PANDEIRO as vogais aparecem em ordem alfabética?
a)48 b)120 c)5040 d)1680 e)720

E) Permutações

O número de permutações simples de n elementos, dos quais há α repetições de um elemento, β repetições de um segundo elemento,..., γ repetições de um outro elemento é dado por:

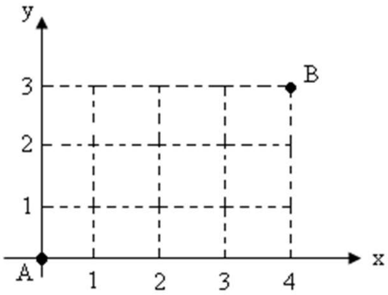
$$P_n^{(\alpha,\beta,\cdots,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdots\gamma!}$$

Nos problemas envolvendo Permutações Simples
Dica 1
Pelo menos um elemento repetido.
Dica 2
A ordem dos elementos é importante.
(A ordem faz diferença).
Dica 3
Usamos todos os elementos.

Exemplo 1:
Quantos anagramas possui a palavra ARARAQUARA?

Exemplo 2:
Determine o número de senhas diferentes, de 8 caracteres , que podemos formar utilizando:
3 algarismos "4"
2 símbolos "&"
1 símbolo "#"
2 símbolos "§"

Exemplo 3:
Na figura abaixo, quantos caminhos diferentes podem ser percorridos do ponto A ao ponto B, deslocando uma unidade de cada vez para cima ou para a direita?



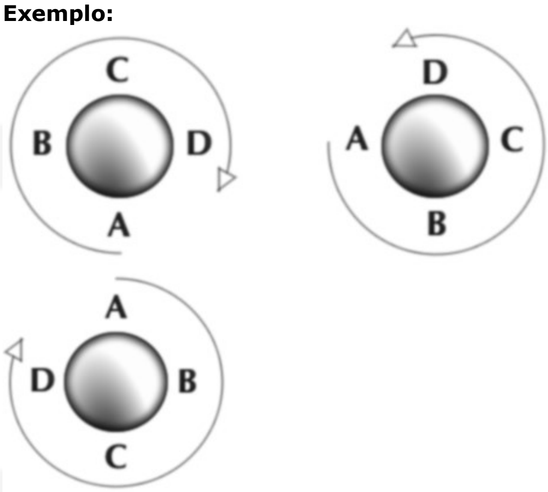
Exemplo 4:
Que nacionalidade podemos obter através de um anagrama da palavra "IGNORANTE"?

Exemplo 5:
Determine três anagramas com a palavra ALEGRIA.

PERMUTAÇÕES CIRCULARES

O que é a permutação circular tio Sormany? bem gente, a definição é simples, permutação circular é uma permuta, troca, alternância que ocorre ao redor de uma mesa, em um círculo de pessoas, em uma roda de lual ou qualquer outro evento que esteja em círculo! por que? porque numa mesa ou numa roda onde temos as "pessoas" A, B, C & D, **há a possibilidade de permutá-las, <u>porém algumas permutações não fazem diferença nenhuma!</u>**

A mesa não precisa necessariamente ser circular, ela pode ter outras formas: **retangular, quadrada, oval,...**
Exemplo:



Para obtermos o número de permutações circulares de n elementos distintos, fixam um deles numa posição e permutamos os $(n-1)$ restantes nas outras posições, ou seja:

$$(PC)_n = (n-1)!$$

Dica 1:
Palavras chaves: Em torno de , Ao redor de,...
Dica 2:
Os elementos estarão dispostos em uma linha fechada, ou seja, todos os elementos terão um elemento a sua esquerda e a sua direita.

Nos problemas envolvendo Permutações Circulares.
Dica 1
Elementos em volta de um círculo.
Dica 2
A ordem dos elementos é importante.
(A ordem faz diferença).
Dica 3
Usamos todos os elementos.(elementos distintos)

Exemplo 1
Quantos colares de contas podem ser feitos com 20 contas diferentes:

a) com fecho.

b) sem fecho.

Exemplo 2
De quantas maneiras distintas, 4 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa quadrada?
A)4 B) 6 C) 10 D) 12 E) 16