

ESTUDO DAS MATRIZES

Introdução



O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como **Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo.**

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

	Química	Inglês	Literatura	Matemática
Tássia	8	7	9	8
Sormany	6	6	7	6
Robério	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota de **Sormany** em **Literatura**, basta procurar o número que se encontra na **segunda linha** da tabela (horizontal) e **terceira coluna** (vertical).

Vamos considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocadas entre parênteses, colchetes ou barras duplas.

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} \text{ ou } \left\| \begin{array}{cccc} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{array} \right\|$$

A essas tabelas damos o nome de matrizes.

Chamamos de matriz de ordem $m \times n$ (lê-se: " m por n ") a toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz do tipo 3×4 , ou seja, **possui 3 linhas e 4 colunas.**

1. Definição

Matrizes são tabelas retangulares cujos elementos estão dispostos em linhas e colunas.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \pi \\ 4 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ \operatorname{tg} 30^\circ & 7 \end{pmatrix} \quad C = \left\| \begin{array}{c} \log 200 \\ \log 1000 \\ \cos 75^\circ \\ 7! \end{array} \right\|$$

O Ministério do Raciocínio Lógico adverte!

1- Uma matriz é do tipo m por n (indica-se $m \times n$), quando possui m linhas e n colunas.

2- Os elementos de uma matriz A são simbolizados por a_{ij} , onde i representa a linha e j representa a coluna onde o elemento está.

Exemplo: O elemento a_{23} ocupa a segunda linha e a terceira coluna de uma matriz A .

Sendo assim, a representação genérica de uma matriz

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ é:}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

2. Matrizes Especiais

Em função dos valores de seus elementos, do número de linhas e colunas ou ainda por serem aplicadas com muita frequência, algumas matrizes possuem nomenclatura especial.

Vejamos algumas dessas matrizes.

2.1. Matriz coluna

É toda matriz que possui apenas uma coluna, isto é, é do tipo $m \times 1$.

$$\text{Exemplos: } A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} -13 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

2.2. Matriz linha

É toda matriz que possui apenas uma linha, isto é, é do tipo $1 \times n$.

Exemplos:

$$A = (-5 \quad 3 \quad 18 \quad 0 \quad 9)_{1 \times 5} \quad B = [-8 \quad 6\sqrt{5}]_{1 \times 2}$$

2.3. Matriz nula

É toda matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

$$\text{Exemplos: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{2 \times 1}$$



2.4. Matriz quadrada

É toda matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas. Diremos que é uma matriz do tipo $n \times n$, ou simplesmente de ordem n .

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 9 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

Observações:

1. Chama-se **diagonal principal** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais.
2. Chama-se **diagonal secundária** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos índices igual a $n + 1$.

$A = \begin{bmatrix} 52 & \pi & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & -8 & 32 & 4 \\ 17 & 0 & 20 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 4.

Sua diagonal principal é $\{52, 3, 32, 6\}$ e sua diagonal secundária é $\{-3, 1, -8, 17\}$.

Traco de uma matriz quadrada

O traco da matriz quadrada A , indicado por Tr , é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

Exemplo:

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow Tr(B) = 0 + 4 + 2 = 6$

Dica do Tio Sormany!!

MATRIZ RETANGULAR → É toda matriz em que o número de linhas é diferente do número de colunas.

2.5. Matriz triangular

É toda matriz quadrada cujos elementos que se localizam acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 51 & -7 & 12 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 13 & 15 \\ 0 & -4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

triangular inferior

triangular superior

$a_{ij} = 0$, se $i < j$

$a_{ij} = 0$, se $i > j$

2.6. Matriz diagonal

É toda matriz quadrada cujos elementos que se localizam acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

$a_{ij} = 0$, se $i \neq j$

2.7. Matriz escalar

É toda matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$

2.8. Matriz identidade ou matriz unidade

É toda matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1.

A matriz identidade de ordem n é denotada por I_n .

Exemplos:

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Em uma matriz identidade, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Atenção: A matriz identidade de ordem 1 é $I_1 = (1)$

2.9. Matriz Oposta

Chama-se **oposta** de uma matriz A a matriz $-A$, na qual cada elemento é o oposto do correspondente em A .

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -5 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 5 & -3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

2.10. Matriz Transposta

Chama-se **transposta** de uma matriz A a matriz A^t , obtida trocando-se, ordenadamente, na matriz A , as linhas por colunas ou as colunas por linhas.



Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{5} \\ -8 & \frac{1}{3} \\ 0 & 15 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 \\ \sqrt{5} & \frac{1}{3} & 15 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

O Ministério do Raciocínio Lógico adverte!

1. Se uma matriz quadrada **A** é tal que $A' = A$, então **A** é uma matriz **simétrica**.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -9 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$ e $A' = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -9 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$, logo

$$A = A' \Rightarrow A \text{ é simétrica.}$$

OBSERVAÇÃO. Nas matrizes **simétricas**, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais ($a_{ij} = a_{ji}$).

3. Se uma matriz quadrada **A** é tal que $A' = -A$, então **A** é uma matriz **anti-simétrica**.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix} = -A' \Rightarrow A \text{ é anti-simétrica.}$$

OBSERVAÇÕES.

- Nas matrizes **anti - simétricas** os elementos da diagonal principal são todos iguais a zero.
- Nas matrizes **anti-simétricas** os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos ($a_{ij} = -a_{ji}$).

3. Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são iguais quando são do mesmo tipo e apresentam **todos** os elementos correspondentes iguais.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} \log_2 8 & \sqrt{7} & \sin 30^\circ \\ -\sqrt{16} & \pi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{7} & \frac{1}{2} \\ -4 & \pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 32 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Adição e Subtração De Matrizes

A soma de duas matrizes **A** e **B**, ambas do tipo $m \times n$, é uma matriz desse mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em **A** e **B**.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -8 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Propriedades:

- Comutativa: $A + B = B + A$
- Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento Neutro: $A + 0 = 0 + A = A$
- Elemento Oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

5. Produto de Número por Matriz

Multiplicar uma matriz **A** por um número **k** é construir uma matriz **B** formada pelos elementos de **A** todos multiplicados por **k**.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 14 \\ -1 & 12 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ -\frac{1}{2} & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Produto de Matrizes

Para multiplicarmos duas matrizes é necessário que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda. A ordem da matriz resultante é dada pelo número de linhas da primeira e o número de colunas da segunda.

$$\bullet A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 4} = (AB)_{2 \times 4}$$

$$\bullet A_{1 \times 7} \cdot B_{7 \times 6} = (AB)_{1 \times 6}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} (2 \times 1) \\ + \\ (3 \times 8) \\ (4 \times 1) \\ + \\ (5 \times 8) \end{matrix} & \begin{matrix} (2 \times 7) \\ + \\ (3 \times 0) \\ (4 \times 7) \\ + \\ (5 \times 0) \end{matrix} & \begin{matrix} (2 \times 6) \\ + \\ (3 \times 9) \\ (4 \times 6) \\ + \\ (5 \times 9) \end{matrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 24 & 14 + 0 & 12 + 27 \\ 4 + 40 & 28 + 0 & 24 + 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 14 & 39 \\ 44 & 28 & 69 \end{bmatrix}$$

OBS.: A multiplicação de matrizes não obedece a propriedade comutativa, no entanto existem matrizes que são comutáveis.

Observações:



- A definição dada garante a existência do produto **AB** somente se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**.
- Sendo possível, o produto **AB** é uma matriz que tem o mesmo número de linhas de **A** e de colunas de **B**.
- O produto de matrizes **não** é uma operação **comutativa**, pois em geral **AB ≠ BA**.
- Quando duas matrizes A e B tais que $A.B = B.A$, dizemos que elas comutam ou que são comutáveis.
- É possível **AB = AC** com **B ≠ C** e **A ≠ 0**

Propriedades:

1) **Associativa:** $(A.B).C = A.(B.C)$

2) **Distributiva:** $A.(B + C) = A.B + A.C$

3) $k.(A + B) = k.A + k.B$

4) $A.0 = 0$

5) $A_{m \times n}.I_n = A$

6) $I_m.A_{m \times n} = A$

7) $(AB)^t = (BA)^t$

8) Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $A.I_n = I_m.A = A$

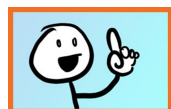
7. Matriz Inversa

Seja A uma matriz de ordem n . Chama-se inversa da matriz A a matriz A^{-1} (que é única) tal que

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Observações:

• $(A^{-1})^{-1} = A$ • $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ • $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$



• Se uma matriz não admite inversa, dizemos que ela é não inversível ou singular.

• Se uma matriz admite inversa, dizemos que ela é inversível ou invertível.



Todos os direitos reservados ao professor Sormany Barreto© Copyright. Proibido a reprodução total ou parcial desta obra 2020.

1.0. ESTUDO DOS DETERMINANTES

Entenderemos por determinante, como sendo um número ou uma função, associado a uma matriz quadrada, calculado de acordo com regras específicas

- É importante observar, que só as matrizes quadradas possuem determinante.
- Usaremos a notação $\det A$ para representar o determinante da matriz A .

2.0. Cálculo de Determinantes

2.1. Determinante de 1ª Ordem

O determinante da matriz $A = (a_{11})$, indicado por

deu A , é o próprio elemento a_{11} , isto é: $\det A = a_{11}$.

$A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = |a_{11}| = a_{11}$ (não confundir com módulo do número a_{11})

Exemplos:

Se $A = [-5]_{1 \times 1}$, então $\det A = |-5| = -5$.

Se $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{1 \times 1} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$

2.2. Determinante de 2ª Ordem

O determinante de uma matriz quadrada de ordem dois é o número real obtido através do produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 4.6 - 3.2 = 24 - 6 = 18$$

Diagonal Secundária
Diagonal Principal

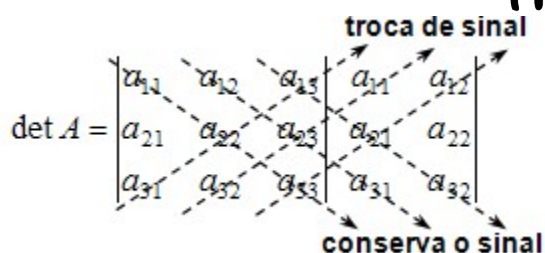
2.3. Determinante de 3ª Ordem (REGRA DE SARRUS)

Para calcularmos um determinante de uma matriz de 3ª ordem usamos a **Regra de Sarrus**, veja:

Receita de Bolo.

1º Passo: Escrevemos a matriz e repetimos a 1ª e a 2ª colunas à direita da 3ª.

2º Passo: Efetuamos a adição algébrica dos produtos dos elementos indicados pelas setas conforme o esquema abaixo



3.0. Propriedades dos Determinantes

As propriedades que estudaremos a seguir poderão ajudar na simplificação desse cálculo.

P_1) Somente as matrizes quadradas possuem determinantes.

P_2) Se todos elementos de uma fila de uma matriz quadrada forem iguais a zero, seu determinante será nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -9 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

P_3) Se uma matriz quadrada tem duas filas paralelas

iguais ou proporcionais, então o seu determinante é igual a zero.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 12 & 9 \\ 4 & 16 & 1 \\ 3 & 12 & 9 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & -2 & 7 & 11 \\ 9 & 1 & 6 & 12 \\ 2 & 7 & 8 & 17 \\ 3 & \frac{1}{3} & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$(L_1 = L_3)$

$(L_2 = 3.L_4)$

P_4) Se uma fila de uma matriz quadrada A é combinação linear de duas ou mais filas paralelas, então $\det A = 0$.

P_5) Multiplicando-se (ou dividindo-se) os elementos de uma fila por um número real $k (k \neq 0)$, o determinante fica multiplicado (ou dividido) respectivamente por k .

P_6) (Teorema de Bezout)

Se trocarmos as posições de duas filas paralelas de uma matriz quadrada A , seu determinante muda de sinal.

Exemplo:

Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, então $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -3$

P_7) O determinante de uma matriz triangular é igual ao **produto** dos elementos de sua diagonal principal.

P_8) (Teorema de Becker)

O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua matriz transposta A^t , isto é:

$$\det A = \det A^t$$

P_9) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n , pelo teorema de Binet, temos:

$$\begin{cases} \det(A.B) = \det A \cdot \det B \\ \det(B.A) = \det B \cdot \det A \end{cases} \Rightarrow \det(A.B) = \det(B.A)$$

P_{10}) **Determinante da matriz inversa.**

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$



• Se $\det A = 0$, não existe a matriz inversa A^{-1} . Dizemos então que a matriz A é **SINGULAR** ou **NÃO INVERSÍVEL**.

• Se $\det A \neq 0$, então a matriz inversa A^{-1} existe e é única.

Dizemos então que a matriz A é **INVERSÍVEL** ou **INVERTÍVEL**.

P_{11}) Se uma matriz quadrada A de ordem n é multiplicada por um número real k , o seu determinante fica multiplicado por k^n , isto é:

$$\det(k.A) = k^n \cdot \det A$$

