Probabilidade

Professor Sormany Barreto

Introdução

Historicamente, a teoria da probabilidade começo com o estudo de jogos de azar, como a roleta e as cartas. O cálculo das probabilidades nos permite encontrar um número que mostra a **chance** de ocorrência do resultado desejado no experimento aleatório.

Estudo da Probabilidade

1.1 Experimentos Aleatórios

Experimentos aleatórios são aqueles que, repetidos em idênticas condições, podem fornecer resultados diferentes.

É qualquer experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

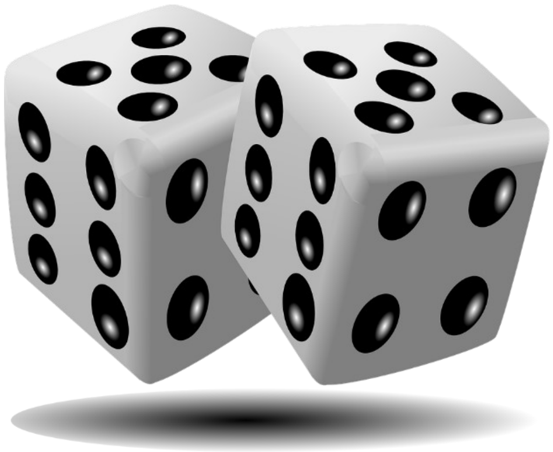
Fenômenos aleatórios acontecem constantemente em nossa vida diária. São frequentes perguntas tais como: Choverá amanhã? Qual será a temperatura máxima no próximo domingo? Qual será o número de ganhadores da Loteria Esportiva?

"Em um experimento aleatório, cujo espaço amostral é equiprovável, a probabilidade de um evento ocorrer é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis."

(Laplace)

Vejamos alguns exemplos de experimentos aleatórios:

i) Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.



ii) Jogue uma moeda e observe a face de cima.

O que os experimentos acima têm em comum?

As seguintes características definem um experimento aleatório.

- Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas.

- Embora não possamos afirmar qual é o resultado do experimento, somos capazes de descrever o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.

1.2 Experimentos determinísticos

Ao lançar uma pedra, sob certas condições, podemos calcular, com certeza, a velocidade com que ela atingirá o solo. Repetindo esse lançamento nas mesmas condições, obtemos o mesmo resultado. Os experimentos em que podemos determinar os resultados nas diversas vezes que repetimos são denominados **experimentos determinísticos**.

Exemplo

Ao aquecermos a água à pressão de 1,0atm, podemos prever antecipadamente que ela ferverá quando chegar à temperatura de 100º C.

2. Espaço Amostral

Dado um fenômeno aleatório, isto é, sujeito às leis do acaso, chamamos de espaço amostral ao conjunto formado por todos os resultados possíveis de ocorrer.

Notação: S ou Ω

Exemplo 1:

Lançamento de duas moedas, observando as faces voltadas para cima:

Espaço Amostral:

S = {(C, C),(C, K), (K, C), (K, K)}, em que K = cara e C = coroa.

Número de elementos do espaço amostral: $n(S) = 4$

Exemplo 2:

Lançamento simultâneo de dois dados, observando as faces superiores:

Espaço Amostral:

S = {(1,1);(1,2); (1,3);...;(2,1);(2,2);...(6,6)}.

Número de elementos do espaço amostral: $n(S) = 36$

3. Evento

Chamaremos de evento todo subconjunto do espaço amostral. Voltemos ao lançamento do dado.

Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por exemplo, o subconjunto $A = \{2, 3, 5\}$ é o evento que acontece se o número mostrado na face de cima é um número primo.

Vejamos outros eventos relativos a este espaço amostral.

B: ocorrência de número menor que 5.

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

C: ocorrência de número menor que 8.

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$$

D: ocorrência de número maior que 8.

$$D = \{\ \} = \varnothing$$

ATENÇÃO

Quando o evento é igual ao espaço amostral, dizemos que o evento é certo.

Exemplo: O evento C é um evento certo.

Quando o evento é igual ao conjunto vazio, dizemos que o evento é impossível.

Exemplo: O evento D é um evento impossível.

3.1 Eventos mutuamente exclusivos (excludentes)

São aqueles que têm conjuntos disjuntos. Dois eventos são mutuamente exclusivos quando não possuem elemento comum.

Assim, por exemplo, no lançamento de um dado, o evento *A* ocorrência de **número quadrado perfeito** e o evento *B* ocorrência de **número primo** são exclusivos, pois $A = \{1,4\}$ e $B = \{2,3,5\}$. Note que $A \cap B = \varnothing$.

3.2 Eventos complementares

São eventos mutuamente exclusivos e a união entre eles é o espaço amostral.

Representamos o complementar de um evento E por $\overline{E}$ ou por E^C.

Observamos então, que pela definição:

$$E \cup \overline{E} = S \; (O\ evento\ união\ é\ o\ próprio\ espaço\ amostral)$$

$$E \cap \overline{E} = \varnothing \; (O\ evento\ \text{int}\, er\, \text{sec}\, ção\ é\ o\ conjunto\ vazio)$$

Exemplo:

Evento E – ocorrência de número par : $E = \{2, 4, 6\}$

Evento $\overline{E}$ – ocorrência de número ímpar: $E = \{1, 3, 5\}$

Observe que:

$$E \cup \overline{E} = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E \cap \overline{E} = \varnothing$$

4. Probabilidade de ocorrência de um evento

A probabilidade de ocorrência de um evento E de um espaço amostral S é representada por P (E), e é o número real dado por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

em que n(E) é o número de casos favoráveis ao evento E e n(S) o número de casos possíveis, desde que sejam igualmente prováveis (equiprováveis).

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis ao acontecimento E}}{\text{número de casos possíveis}}$$

ATENÇÃO

FÓRMULA (LINDA)

$$\text{CHANCE} = \frac{\text{O QUE VOCÊ QUER}}{\text{O QUE VOCÊ TEM}}$$

<u>ESPAÇO EQUIPROVÁVEL</u>

É um espaço amostral no qual todos os eventos elementares tem a mesma probabilidade de acontecer.

4. Propriedades das probabilidades

A probabilidade do evento impossível é 0 e a probabilidade do evento certo é igual a 1.

Exemplo:

A probabilidade de que você venha a morrer algum dia é 1 ou 100%, pois a morte, algum dia, é certa. Em contraste, a probabilidade de um evento impossível é 0. Por exemplo, a probabilidade de o falecido cantor **Waldick Soriano** reaparecer e cantar a música " **Eu Não Sou Cachorro Não**" é 0 ou 0%.

Se E é um evento qualquer, então $0 \le P(E) \le 1$

ou $0\% \le P(E) \le 100\%$.

Esta propriedade afirma que qualquer probabilidade é um número maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1.

A soma das probabilidades de um evento e do seu evento complementar é igual a unidade.

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1 = 100\%.$$

$$P(\,evento\ ocorrer\,) + P(\,evento\ não\ ocorrer\,) = 1$$

Exemplos:

$$P(\,cara\,) + P(\,coroa\,) = 1$$

$$P(\,par\ no\ dado\,) + P(\,ímpar\ no\ dado\,) = 1$$

$$P(\,réu\ culpado\,) + P(\,réu\ inocente\,) = 1$$

$$P(\,mais\ de\ cinco\ defeitos\,) + P(\,máximo\ de\ cinco\ defeitos\,) = 1$$

$$P(\,nascer\ pelo\ menos\ uma\ menina\,) + P(\,nascer\ nenhuma\ menina\,) = 1$$

$$P(\,ganhar\ o\ jogo\,) + P(\,não\ ganhar\ o\ jogo\,) = 1$$

$$P(\,pelo\ menos\ uma\ cara\,) + P(\,nehuma\ cara\,) = 1$$

$$P(\,a\ nota\ é\ no\ máximo\ 9\,) + P(\,nota\ igual\ a\ 10\,) = 1$$

Exemplos resolvidos:

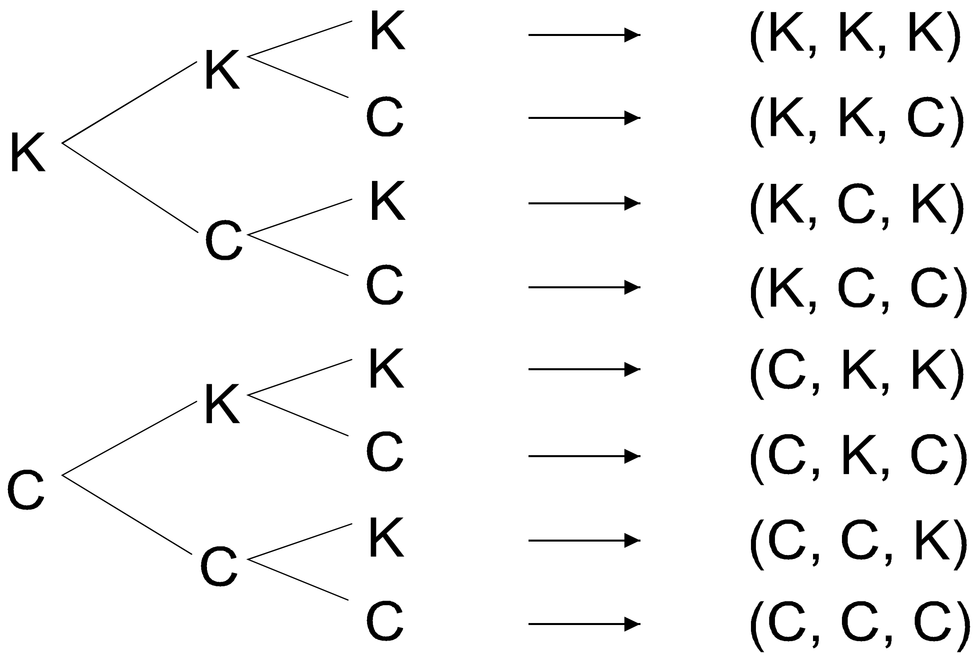
1) Uma moeda é lançada três vezes, sucessivamente.

Qual a probabilidade de observarmos:

a) exatamente uma cara?
b) no máximo duas caras?

Resolução:

Vamos construir um diagrama de árvore onde na 1ª, 2ª e 3ª colunas, respectivamente, representaremos os possíveis resultados para o 1º, 2º e 3º lançamentos.



K: cara
C: coroa

O espaço amostral é formado pelas **oito** sequências indicadas.

Pelo" Princípio Fundamental Da Contagem", teremos:

$$1^o\ lançamento : 2\ possibilidades$$
$$2^o\ lançamento : 2\ possibilidades$$
$$3^o\ lançamento : 2\ possibilidades$$

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$ resultados possíveis.

a) O evento E_1 que nos interessa é:

{(K, C, C), (C, K, C), (C, C, K)}

Assim, $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$.

b) As sequências que nos interessam são aquelas que apresentam nenhuma, uma ou duas caras. Assim, o evento pedido é:

$$E_2 = \{(C, C, C), (K, C, C), (C, K, C),$$

$$(C, C, K),(K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$$

Logo, $P\left(E_2\right) = \frac{7}{8} = 87{,}5\%$.

2) Considere dois dados, cada um deles com seis faces numeradas de 1 a 6.

Se os dados são lançados ao acaso, qual a probabilidade das faces obtidas darem soma maior ou igual a 8?

Resolução:

No lançamento de dois dados distintos, não viciados, o espaço amostral está representado abaixo:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\} \therefore n(S) = 36$$

Pelo" Princípio Fundamental Da Contagem", teremos:

$$\rightarrow 1^{o}\ lançamento : 6\ \ possibilidades$$

$$\rightarrow 2^{o}\ lançamento : 6\ \ possibilidades$$

$n(S) = 6 \times 6 = 36$ resultados possíveis

Evento: Obter soma das faces maior ou igual a 8

				(2,6)
			(3,5)	(3,6)
		(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Verificamos que temos (1 + 2 + 3 + 4 + 5) casos favoráveis em um total de 36 possíveis resultados.

A probabilidade “P” que atende ao enunciado será:

$$P = \frac{15 \div 3}{36 \div 3} = \frac{5}{12}$$

A unidade da grandeza presente no numerador (item 4.0) tem que ser a mesma unidade da grandeza presente no denominador, ou seja: Se no numerador fossem **duplas de bolas**, consequentemente, no denominador deverá ser total de **duplas de bolas.**

Se fosse para determinar a probabilidade de acertar a Mega-Sena com um único cartão com 6 dezenas marcadas; no numerador teremos o número 1 representando um grupo de seis dezenas e no denominador teremos todos os grupos de 6 dezenas com 60 dezenas possíveis.

Temos 60 números dos quais apenas 60 serão escolhidos

$$C_{60,6} = \binom{60}{6} = \frac{60!}{6!.54!} = 50.063.860$$ possibilidades.

Ou seja, se você faz uma aposta mínima, a sua chance de ganhar é de apenas

$$P = \frac{1}{50.063.860} \cong 0$$

CENTRO DE ESTUDOS

SOU + SORMANY!

ENCARE A BATALHA E
A GENTE CHEGA JUNTO

Youtube.com/smsormany

@smsormany

smsormany

Até a próxima aula